Binární operace na A je zobrazení $A \times A \to A$

Množina s asociativní bin. operací je pologrupa.

$e \in A$ je neutrální vzhledem k operaci $*$, když $\forall a \in A$ platí $e * a = a * e = a$.

Pologrupa s neutrálním prvkem je monoid.

GRUPY

Buď $(A, *, e)$ monoid, $a \in A$.
$b \in A$ se nazývá INVERZNÍ prvek k a vzhledem k operaci $*$, jestliže $a * b = b * a = e$. (ozn. a^{-1}

Př: $(\mathbb{R}, +, 0)$, $a = 6$, inverzní prvek je -6.

$(\mathbb{R}, \cdot, 1)$, $a = 6$, inverzní prvek je $\frac{1}{6}$.

Jestliže k a existuje inverzní prvek, pak a je INVERTIBILNÍ.

Tvrzení $(A, *, e)$ ... monoid. Je-li $a \in A$ invertibilní, pak k němu existuje právě jeden prvek inverzní.

Důkaz a invertibilní $\Rightarrow$ existuje inverse.
Předpokládejme b_1, b_2 jsou inverzní k a.

$\Rightarrow$ $b_1 * a = a * b_1 = e = b_2 * a = a * b_2$.

$$b_1 = b_1 * e = b_1 * (a * b_2) = (b_1 * a) * b_2 =$$

$$= e * b_2 = b_2.$$

Monoid, ve kterém ke každému prvku existuje prvek inverzní, se nazývá GRUPA.

$$(A, *, e, {}^{-1})$$

Př. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1, {}^{-1})$

<u>Tvrzení</u> Buď $(G, *, 1, ^{-1})$ grupa. Pak $\forall a, b \in G$ platí:

1) jestliže $a * b = 1$, pak $b = a^{-1}$ a $a = b^{-1}$.
2) $1^{-1} = 1$.
3) $(a^{-1})^{-1} = a$.
4) $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

<u>Důkaz</u> 1) Předp., že $a * b = 1$.

$$b = 1 * b = a^{-1} * a * b = a^{-1} * 1 = a^{-1}.$$

zbytek DÚ.

PODGRUPY

Buď $(A, *, e, ^{-1})$ grupa; $B \subseteq A$ podmnožina. Nechť

1) $b_1, b_2 \in B \Rightarrow b_1 * b_2 \in B$

2) $e \in B$

3) $b \in B \Rightarrow b^{-1} \in B$.

Pak B se nazývá PODGRUPA grupy A.

Př.: Každá grupa je svou podgrupou.

$\{e\}$

$2\mathbb{Z}$ ... všechna sudá čísla, $(\mathbb{R}, +, 0, -)$

$(\mathbb{Z}, +, 0, -)$, $m \in \mathbb{N}$

všechny podgrupy jsou $m\mathbb{Z} = \{m \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$

HOMOMORFISMY

- $(A, *)$, $(B, +)$ pologrupy

  zobrazení $f: A \to B$ se nazývá HOMOMORFISMUS POLOGRUP, jestliže $\forall\, a_1, a_2 \in A$ platí

  $$f(a_1 * a_2) = f(a_1) + f(a_2).$$

- $(A, *, e_A)$, $(B, +, e_B)$ monoidy

  $f: A \to B$ se nazývá HOMOMORFISMUS MONOIDŮ, je-li to homomorfismus pologrup $(A, *)$, $(B, +)$ a

  $$f(e_A) = e_B.$$

- $(A, *, e_A, {}^{-1})$, $(B, +, e_B, {}^{-1})$ grupy.

  $f: A \to B$ je HOMOMORFISMUS GRUP, je-li to homom. monoidů $(A, *, e_A)$, $(B, +, e_B)$ a $\forall\, a \in A$

  $$f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}.$$

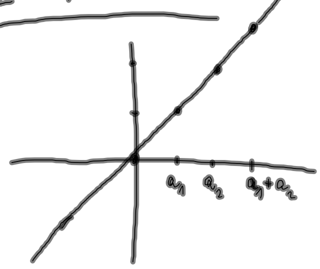
Př: $(\mathbb{Z}, +, 0, -)$, $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto 2z$.

$z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccccc} f(z_1+z_2) & \overset{?}{=} & f(z_1) & + & f(z_2) \\ \parallel & & \parallel & & \\ 2(z_1+z_2) & = & 2z_1 & + & 2z_2 \end{array}$$

$$f(0) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} f(-z) & = & -f(z) \\ \parallel & & \parallel \\ 2\cdot(-z) & = & -2z \end{array}$$



<u>Tvrzení!</u> Buďte $f: A \to B$, $g: B \to C$ homomorfismy pologrup (monoidů, grup). Pak $g \circ f: A \to C$ je homomorfismus pologrup (monoidů, grup).

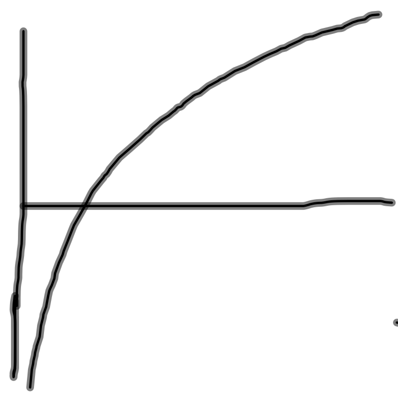
<u>Tvrzení!</u> Buďte $(A, *, e_A, {}^{-1})$, $(B, +, e_B, {}^{-1})$ grupy, $f: A \to B$ homomorfismus pologrup $(A, *)$, $(B, +)$. Pak f je homomorfismus grup $(A, *, e_A, {}^{-1})$, $(B, +, e_B, {}^{-1})$.

IZOMORFISMY

IZOMORFISMUS pologrup (monoidů, grup) A, B je homomorfismus $f: A \to B$, který je bijektivní.

Př.: $(\mathbb{R}_+, \cdot, 1, ^{-1})$, $(\mathbb{R}, +, 0, -)$

ln



e^x